Teorema nullità+rango

$$f: V_n(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K}) \qquad \dim V_n(\mathbb{K}) = n$$

$$\Rightarrow \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

$$\text{null}(f) + \text{rk}(f) = n$$

Siano $n \neq m \Rightarrow \mathbb{K}^n \not\cong \mathbb{K}^m$

Supponiamo $m < n \Rightarrow$

ogni applicazione $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

avrà nullità almeno $(n-m)$

$\dim \operatorname{Im}(f) \leq m$

$n - \text{null}(f)$ $\Rightarrow \text{null}(f) \geq n-m.$

$\Rightarrow \ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ non può essere iniettiva $\square$

oss: Sia $V_n(\mathbb{K})$ sp. vett. $\dim V_n(\mathbb{K}) = n$

$\Rightarrow \forall\, 0 \le i \le n \quad \exists\, W \le V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W = i$

dim: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di V_n

$\forall i$: $W_i := \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ $\quad i > 0$

$W_0 := \{0\}$

$\dim W_i = i$. □

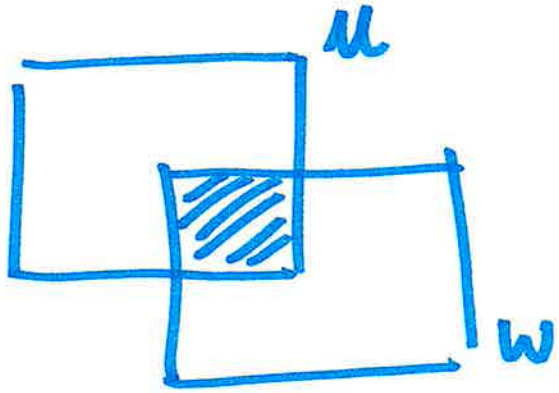
oss: Sia $W \le V_n(\mathbb{K})$, $\dim W = n \Rightarrow W = V$ $\quad n < \infty$

dim: siccome $\dim W = n \Rightarrow W$ ammette una base di n vettori $\Rightarrow$ una base di W genera W ed è formata da n vettori di V indipendenti $\Rightarrow$ è una seq. libera di n vettori di $V \Rightarrow$ è una seq. di generatori per $V \Rightarrow$ genera $V \Rightarrow V = W$ □

prodotto, intersezione e somma di sp. vettoriali. $n < \infty$

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp vettoriale $\dim V_n(\mathbb{K}) = n$

e siano $U, W \leq V_n(\mathbb{K})$.



$\Rightarrow U \cap W \leq V_n(\mathbb{K})$

Siano $\bar{x}, \bar{y} \in U \cap W$ $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in U$ perché $\bar{x}, \bar{y} \in U$

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$ perché $\bar{x}, \bar{y} \in W$.

$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in U \cap W$ □

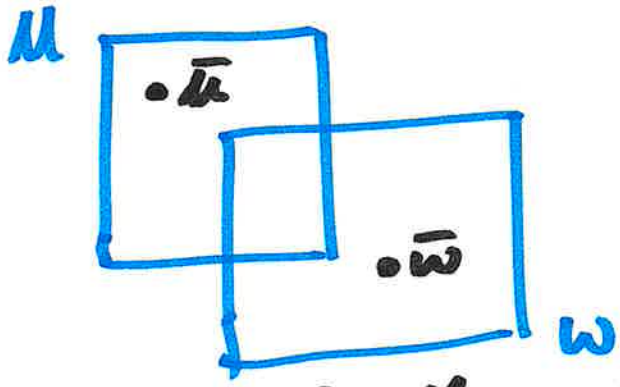
$U \cap W \leq U$ $U \cap W \leq W$

$\Rightarrow \quad \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W).$

$U \cup W \leq V \iff U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W$

oppure

$W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U.$



Supponiamo $\exists \bar{u} \in U \setminus W$ e $\bar{w} \in W \setminus U$ e $U \cup W \leq V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{w} \in U \cup W \Rightarrow$

- $\bar{u} + \bar{w} \in U \Rightarrow (\bar{u} + \bar{w}) - \bar{u} = \bar{w} \in U$ ↯
- $\bar{u} + w \in W \Rightarrow (\bar{u} + w) - \bar{w} = \bar{u} \in W$ ↯

Ne segue $\bar{u} + \bar{w} \in U \cup W \Rightarrow U \cup W \nleq V_n(\mathbb{K})$ □

Siano $U(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$ $U \times W := \{(\bar{u}, \bar{w}) \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W\}$

è sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto le operazioni

$\alpha \cdot (\bar{u}, \bar{w}) = (\alpha \bar{u}, \alpha \bar{w})$

$(\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{u}', \bar{w}') = (\bar{u} + \bar{u}', \bar{w} + \bar{w}')$.

Sia $U(\mathbb{K}) = U_m(\mathbb{K})$ $\quad \dim U = m$ $\quad < \infty$

$W(\mathbb{K}) = W_n(\mathbb{K})$ $\quad \dim W = n$

$\Rightarrow \dim U \times W = m + n$

DIM: Sia $\mathcal{B}_U = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m)$ una base di U

$\mathcal{B}_W = (\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n)$ una base di W $\Rightarrow$

$\mathcal{B}_{U\times W} := ((\bar{e}_1,\underline{0}),(\bar{e}_2,\underline{0}) \dots (\bar{e}_m,\underline{0}),(\underline{0},\bar{f}_1) \dots (\underline{0},\bar{f}_n))$

è base di $U\times W$. $\quad |\mathcal{B}_{U\times W}| = m+n.$

$\forall \bar{u}\in U \ \exists\, a_1 \dots a_m : \bar{u} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_m\bar{e}_m$

$\forall \bar{w}\in W \ \exists\, \beta_1 \dots \beta_n : \bar{w} = \beta_1\bar{f}_1 + \dots + \beta_n\bar{f}_n$

$\Rightarrow \forall (\bar{u},\bar{w}) \in U\times W \ \exists a_1 \dots a_m, \beta_1 \dots \beta_n :$

$(\bar{u},\bar{w}) = (a_1\bar{e}_1 \dots + a_m\bar{e}_m, \beta_1\bar{f}_1 + \dots + \beta_n\bar{f}_n) =$

$(*) \quad = a_1(\bar{e}_1,\underline{0}) + \dots + a_m(\bar{e}_m,\underline{0}) + \beta_1(\underline{0},\bar{f}_1) + \dots + \beta_n(\underline{0},\bar{f}_n)$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{U\times W}$ è di generatori.

supponiamo $(*) = \underline{0} \Rightarrow (\bar{u},\bar{w}) = (\underline{0},\underline{0}) \Rightarrow \bar{u} = \underline{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$

$\bar{w} = \underline{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$

$\Rightarrow$ la sq. $\mathcal{B}_{U\times W}$ è libera. $\square$

$U \times W$ è detto prodotto cartesiano di U e W
oppure anche **somma esterna** di U e W.

Def: Siano $U, W \leq V_n(\mathbb{K})$ sottospazi

Definiamo $U + W := \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \}$.

SOMMA (interna) di U e W.

proposizione: $U + W = \mathcal{L}(U \cup W)$

ovvero
1) $U + W \leq V(\mathbb{K})$
2) $U \cup W \subseteq U + W$
3) $U + W$ è il più piccolo sott. di V che contiene sia U che W.

[$\exists$ se $U \cup W \subseteq X$ e $X \leq V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $U + W \leq X$]

DIM: 1) Siano $\bar{a} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ e $\bar{b} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \in U + W$

$$\Rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \alpha(\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + \beta(\bar{u}_2 + \bar{w}_2) =$$

$$= (\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2) + (\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2) \in U + W.$$

$\in U$ $\quad$ $\in W$

$\Rightarrow U + W \leq V(\mathbb{K})$.

2) $\forall \bar{u} \in U$: $\bar{u} + \underset{\in W}{\underline{0}} = \bar{u} \in U + W$

$\forall \bar{w} \in W$: $\underset{\in U}{\underline{0}} + \bar{w} = \bar{w} \in U + W$

$\Rightarrow U \cup W \subseteq U + W$.

3) Sia X un sottospazio che contiene $U \cup W \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \bar{u} \in U \ \forall \bar{w} \in W : \bar{u}+\bar{w} \in X \Rightarrow U+W \subseteq X.$

poiché $U+W \subseteq V$ per 1 ne segue

$$U+W \subseteq X$$

$$\Rightarrow \quad U+W = \mathcal{L}(U \cup W) \qquad \square$$

$$\dim (U+W) \leq n = \dim V$$

$$U \subseteq U+W \Rightarrow \dim U \leq \dim U+W$$
$$W \subseteq U+W \Rightarrow \dim W \leq \dim U+W$$

$$\left[\max (\dim U, \dim W) \leq \dim (U+W) \leq n \right.$$

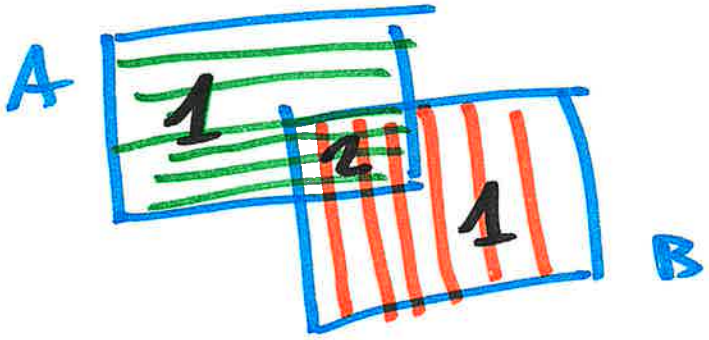
$$\left. (0 \leq) \dim (U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W). \right.$$

Formula di Grassmann

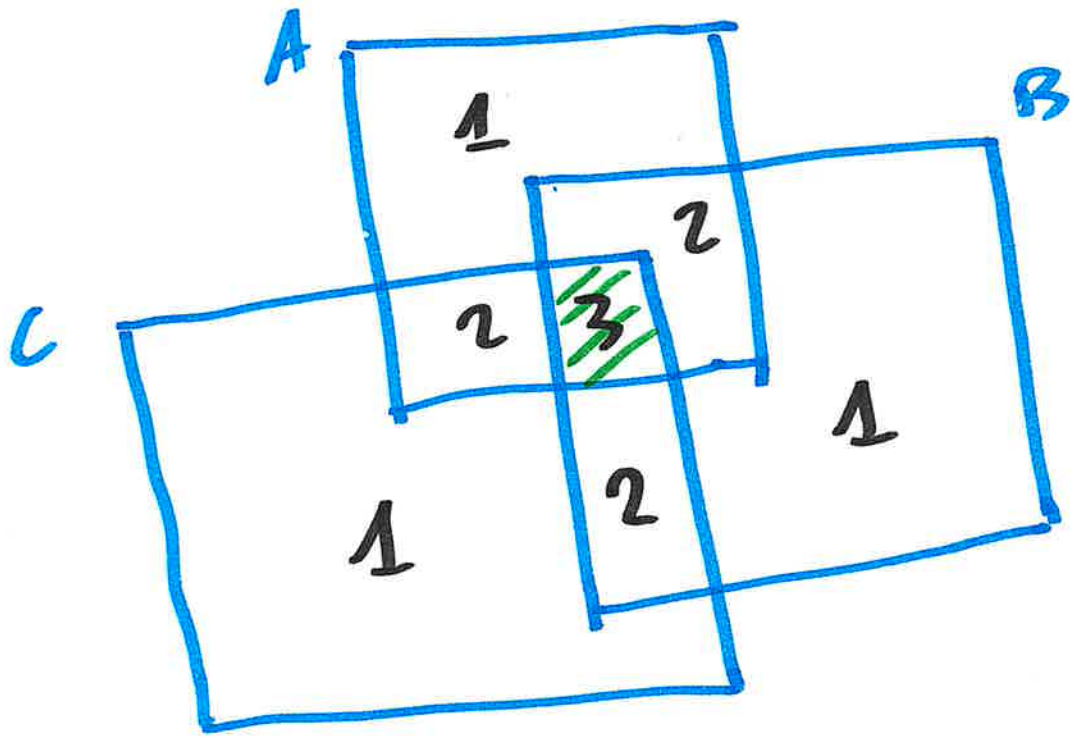
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Siano A, B due insiemi $\Rightarrow$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U \times W).$$

Dim: Sia $\psi : \begin{cases} U \times W \to U+W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \to \bar{u}+\bar{w} \end{cases}$

ψ è lineare Dominio $= U \times W$

$\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$.

ψ è suriettiva. $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(\psi) = \dim(U+W)$

$\| $

$\mathrm{rk}(\psi)$.

$$\ker \psi = \{ (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{u} + \bar{w} = \underline{0} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \in U \times W \mid -\bar{u} \in W \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \in U \times W) \ \bar{u} \in U \cap W \} \cong$$

$$\cong U \cap W$$

[$U \cap W \to U \times W$

$\bar{u} \to (\bar{u}, -\bar{u})$]

$$\dim \ker \psi = \operatorname{null}(\psi) = \dim (U \cap W)$$

□

$$\dim (U+W) + \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

$U, W \leq V_n(\mathbb{K})$

$\dim V_n = n < \infty$

$$\dim U+W \leq n$$

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$\Rightarrow \dim U+W \leq \dim U + \dim W.$$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U+W) \leq \min(n, \dim U + \dim W).$$

$$\max(0, \dim U + \dim W - n) \leq \dim U \cap W \leq \min(\dim U, \dim W)$$

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim (U+W)}_{\leq n}$$

$$\geq \underbrace{\dim U + \dim W - n}$$

Esercizio: su $\mathbb{R}^7$ siano $U \leq \mathbb{R}^7$, $W \leq \mathbb{R}^7$

$\dim U = 5$, $\dim W = 4$

$$5 \leq \dim(U+W) \leq \min(9, 7) = 7$$

$$\max(0, 9-7) = 2 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(5, 4) = 4$$

□

$$\psi: \begin{cases} U \times W \to U + W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \to \bar{u} + \bar{w} \end{cases} \qquad U, W \leq V(\mathbb{K})$$

$\forall \bar{u} \in U, \forall \bar{w} \in W \quad \exists (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W$ e

$\psi(\bar{u}, \bar{w}) = \bar{u} + \bar{w} \Rightarrow \quad Im(\psi) = U + W$

$$rk(\psi) = \dim(U + W)$$

$$\underbrace{null(\psi)}_{\dim(U+W)} + rk(\psi) = \dim(U \times W) = \dim U + \dim W$$

$null(\psi) = \dim \ker \psi.$

$$null(\psi) = \dim(U \cap W)$$

$$\ker \psi = \{ (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \psi(\bar{u}, \bar{w}) = \bar{0} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{u} + \bar{w} = \bar{0} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \mid \bar{w} = -\bar{u} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \in U \times W \} . =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) : \bar{u} \in U, -\bar{u} \in W \}$$

$-\bar{u} \in W \Leftrightarrow \bar{u} \in W$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) : \bar{u} \in U \cap W \} . \cong U \cap W$$

$$\Lambda : \begin{cases} U \cap W \to \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \mid \bar{u} \in U \cap W \} \\ \bar{u} \longrightarrow (\bar{u}, -\bar{u}) \end{cases}$$

$$\dim(\ker \psi) = \dim(U \cap W).$$

$$\dim(U+W) \leq \min(n, \dim U + \dim W)$$

$n = \dim V$

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$

$$\geq \dim U + \dim W - n$$

$$\psi : \begin{cases} U \times W \to U + W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \to \bar{u} + \bar{w} \end{cases}$$

dati $U, W \leq V_n(\mathbb{K})$

cosa succede se ψ è un isomorfismo.

ψ isomorfismo $\Leftrightarrow$ biiettiva

$\Leftrightarrow \ker(\psi) = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$.

$\Leftrightarrow \text{null}(\psi) = 0$

$\Leftrightarrow \dim(U \cap W) = 0$

$\Leftrightarrow U \cap W = \{\bar{0}\}$. $\leftrightarrow$ $U \cap W$ è banale.

ogni vettore di $U + W$ si scrive in modo unico come una somma di vettori $\bar{u} \in U$ e $\bar{w} \in W$.

→ OGNI VETTORE HA UNA UNICA PREIMMAGINE.

Prop.: Siano $U, W \leq V_n(\mathbb{K})$ allora queste 2 proprietà sono equivalenti

1) $\forall\ \bar{u}+\bar{w}=\bar{x} \in U+W\ \exists!\ (\bar{u},\bar{w}) \in U \times W$ tale che $\bar{x}=\bar{u}+\bar{w}$.

2) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

□

Def.: Siano U, W due sottospazi di $V_n(\mathbb{K})$ tali che valga una (e quindi entrambe) delle condizioni 1), 2) $\Rightarrow$ si dice che la somma $U+W$ è <u>diretta</u> e si scrive

$$U \oplus W.$$

↖ somma diretta.

1) $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$ se la somma diretta.

2) $U \oplus W \cong U \times W$

3) Siano $\mathcal{B}_U$ una base di U,
$\mathcal{B}_W$ una base di W
$\Rightarrow$ se $U \oplus W$ si ha $\mathcal{B}_{U \oplus W} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è
una base di $U \oplus W$.

[In generale $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un insieme di generatori per $U + W$; nel caso di somma diretta è una base]

DIM 3) Ricordiamo che gli isomorfismi mandano basi del dominio in basi dell'immagine.

$$\mathcal{B}_{V\times W} = \{(\bar{e}_1, \underline{0}), (\bar{e}_2, \underline{0}) \dots (\bar{e}_\ell, \underline{0}),$$
$$(\underline{0}, \bar{e}'_1) \dots (\underline{0}, \bar{e}'_m)\}.$$

ove $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_\ell)$ base di $U = \mathcal{B}_V$

$(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ base di $W = \mathcal{B}_W$

$$\psi(\mathcal{B}_{V\times W}) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_\ell, \bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m) = \mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W.$$

□

$U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Def: Siano $U_1, U_2 \dots U_k \leq V_n(\mathbb{K})$.

Si dice che la somma di $U_1 \dots U_k$ è **diretta**

e si scrive $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$

se $U_1 + U_2 + \dots + U_k \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$

cioè $\psi : \begin{cases} U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \to U_1 + U_2 + \dots + U_k \\ (\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_k) \to \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_k \end{cases}$

è isomorfismo.

ovvero ogni vettore di $U_1 + \dots + U_k$

si scrive in modo unico come somma di vettori

$\bar{u}_i \in U_i$.

ovvero l'unione di tutte le basi B_{U_i} degli U_i è una base della somma.

⚠ Se $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ diretta $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, i,j$ abbiamo $U_i \cap U_j = \{0\}$.

NON VALE IL VICEVERSA!

ESEMPIO In $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$U_1 = L((1,0))$ $\quad U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$U_2 = L((0,1))$ $\quad U_1 \cap U_3 = \{0\}$

$U_3 = L((1,1))$ $\quad U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

ma $\dim U_1 \times U_2 \times U_3 = 3$

$$\mathcal{B}_{U_1 \times U_2 \times U_3} = \{ ((1,0),(0,0),(0,0)), ((0,0),(0,1),(0,0)), ((0,0),(0,0),(1,1)) \}.$$

$$\dim(M_1+M_2+M_3) \leq 2$$

$$M_1+M_2+M_3 = L((1,0),(0,1),(1,1)) =$$
$$= L((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$$

$M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k \iff$

$M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

e $\forall i \geq 2 : (M_1 \oplus \dots \oplus M_{i-1}) \cap M_i = \{0\}$.

DEF: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di dim $= n$, $M \leq V_n(\mathbb{K})$. Si dice complemento diretto di M in $V_n(\mathbb{K})$ ogni sottospazio $X \leq V_n(\mathbb{K})$

tale che $U \oplus X = V_n(\mathbb{K})$.

COSTRUZIONE ($n < \infty$)

1) Sia $\mathcal{B}_U = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_t)$ una base di U ($\dim U = t \leq n$).

2) Completiamo $\mathcal{B}_U$ a base di $V_n(\mathbb{K})$ aggiungendo $\mathcal{B}' = (\bar{e}_{t+1} \dots \bar{e}_n)$ $n-t$ vettori

3) poniamo $X = \mathcal{L}(\mathcal{B}')$

$\Rightarrow X \cap U = \{\underline{0}\}$ e $X + U = V_n(\mathbb{K})$

□

DATA UNA SEQ S DI VETTORI DI $\mathbb{K}^n$

→ DETERMINARE SE È BASE:

1) Se $|S| \neq n \Rightarrow$ **NO**

2) Se $|S| = n$ verifichiamo se S è libera.

$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$.

(*) $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$

e cerchiamo per quali valori di $(a_1 \dots a_n)$ (*) è soddisfatta.

→ vogliamo una funzione

$$\det : \begin{cases} (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K} \\ [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \to a \end{cases}$$

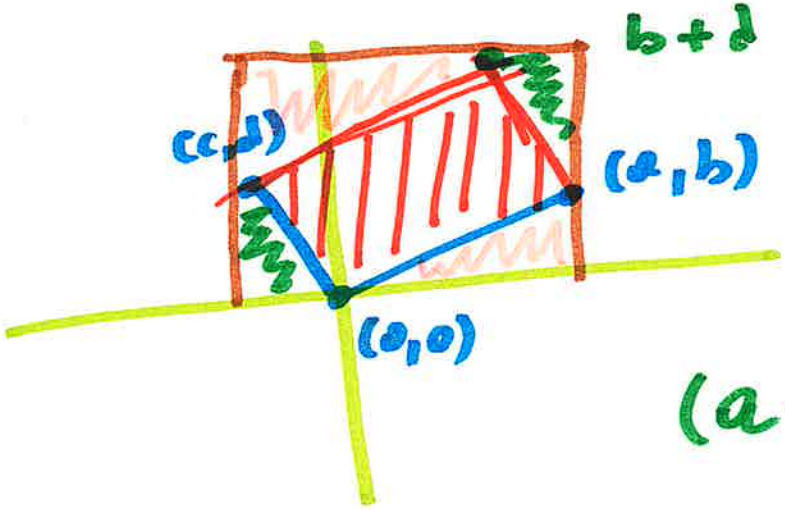
Vale che $\det[\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n] = 0 \iff$

$\iff (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è legata.

$\iff \dim \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) < n$

(a,b) (c,d)

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



$$(a-c)\cdot(b+d) - ab + cd =$$

$$= ab + ad - bc - dc + cd - ab =$$

$$= ad - bc$$

proprietà delle dip. lineare. S sequenza di vettori di $V_n(\mathbb{K})$

1) $\underline{0} \in S \Rightarrow S$ è legata. $1\cdot\underline{0} + 0 \dots = \underline{0}$

2) $\exists\, \bar{v} \in S$ che è c. lineare dei rimanenti $\Leftrightarrow S$ è legata.

$1\cdot\bar{v} - \dots = \underline{0}$

se $\bar{v}$ è c. lineare dei rimanenti.

Se nessun vettore di S è c. lineare dei rimanenti

$\Rightarrow S$ è libera.

3) Se 2 vettori di S sono uguali $\Rightarrow S$ è legata. $\bar{v}_i = \bar{v}_j$

$1\cdot\bar{v}_i - 1\cdot\bar{v}_j = \underline{0}$

4) S è libera (legata) $\Leftrightarrow$ sommando ad un suo vettore una c. lineare dei rimanenti.

S è ancora libera (legata).

DIM (4): Sia S libera $S=(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$

e per assurdo supponiamo $S'=(\bar{w}_2 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$

con $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 + \sum_{i=2}^{n} d_i \bar{v}_i$

$\Rightarrow S'$ è libera.

$$\alpha \bar{w}_2 + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \underline{0} \quad \text{con } (\alpha \beta_2 \dots \beta_n) \neq (0 \dots 0)$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{v}_2 + \alpha d_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha d_n \bar{v}_n + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

$$= \alpha \bar{v}_2 + (\alpha d_2 + \beta_2) \bar{v}_2 + \dots + (\alpha d_n + \beta_n) \bar{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \& \quad (\alpha d_2 + \beta_2) = (\alpha d_3 + \beta_3) = \dots = (\alpha d_n + \beta_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \ \& \ \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0 \Rightarrow S' \text{ libera}$$

viceversa S' libera $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\bar{w}_1 + \beta_2\bar{v}_2 + \dots + \beta_n\bar{v}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \;\&\; \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_0[\alpha\bar{v}_1 + \sum a_i\bar{v}_i] + \beta_0$

$\Rightarrow$ per assurdo S fosse legata $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \gamma_1 \dots \gamma_n : \quad \gamma_1\bar{v}_1 + \dots + \gamma_n\bar{v}_n = \underline{0}$

non tutti i: $\gamma_i = 0 \Rightarrow$

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i\bar{v}_i \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{w}_1 - \sum_{i=2} a_i\bar{v}_i$$

$$\Rightarrow \gamma_1\bar{w}_1 - \gamma_1\sum_{i=2} a_i\bar{v}_i + \gamma_2\bar{v}_2 + \dots + \gamma_n\bar{v}_n = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_2\bar{w}_1 + (\gamma_2 - \gamma_1 a_2)\bar{v}_2 + \dots + (\gamma_n - \gamma_1 a_n)\bar{v}_n = \underline{0}$$

$\Rightarrow \gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n = 0$ $\lightning$ $\Rightarrow$ S libera $\square$

5) Scambiando due vettori di S fra loro
S libera <=> S' libera.

6) S è legata <=> ∃ una combinazione lineare di (n-1) vettori di S a coefficienti non tutti nulli che è uguale a un vettore appartenente a S

6) S è legata <=> è possibile scrivere una sequenza S' a partire da S sommando a un suo vettore una c. lineare dei rimanenti e tale che S' contenga il vettor nullo.

$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legata $\iff$

$\iff \exists i : \bar{v}_i = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{i-1} \bar{v}_{i-1} + a_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \bar{v}_n$

$\Rightarrow$ sostituendo a $\bar{v}_i$ il vettore

$$\underline{0} = \bar{v}_i - \sum_{j \neq i} a_j \bar{v}_j$$

otteniamo S' con $\underline{0} \in S'$.

Se S è libera nessuna sostituzione di quel genere può dare $\underline{0}$

Desiderata.

1) funzione det: $\overbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}^{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$

2) Se uno degli argomenti di det $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(S) = 0$

3) Se due argomenti di det sono uguali $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(S) = 0$

4) Se sommiamo a uno degli argomenti una combinazione dei restanti

$\Rightarrow \det(S) = \det(S')$.

5) Se scambiamo fra loro gli argomenti di S

$\Rightarrow$ in generale $\det(S) \neq 0 \iff \det(S') \neq 0$

6) Se S è libera $\det(S) \neq 0$

[Se S legata $\det(S) = 0$]

Def: Una funzione

$$f : (\mathbb{K}^n)^m \longrightarrow \mathbb{K}$$

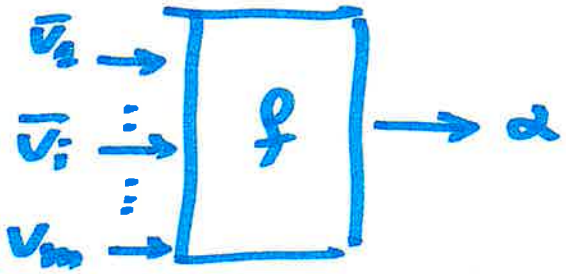
è detta <u>forma multilineare</u> se

$\forall i = 1, \dots m$

$$f(\bar{v}_1 \dots \alpha\bar{v}_i + \beta\bar{w}_i \dots \bar{v}_m) =$$

$$= \alpha f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_m) +$$

$$\beta f(\bar{v}_1 \dots \bar{w}_i \dots \bar{v}_m)$$



$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((a,b),(c,d)) \longrightarrow ac+bd \end{cases}$$

$f((a,b),(x,y)) = ax+by$ lineari tutte e due.

$f((x,y),(c,d)) = xc+yd$

$\Rightarrow f$ é <u>bi</u>lineare.

Def: $f: (\mathbb{K}^n)^m \to \mathbb{K}$ multilineare è detta **simmetrica** se scambiando i vettori

in ingresso i vettori in uscita
il valore non cambia.

$$f((a,b),(c,d)) = f((c,d),(a,b)).$$

$f((a,b),(c,d)) = ad - bc$ NON è SIMMETRICA.

f è <u>alternante</u> se

$$f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) = 0$$ ogni qual volta

ci sono in f due vettori uguali.

f alternante $\Rightarrow$ se si scambiano 2 vettori in f
$1 \neq -1$ $\Rightarrow$ il segno di f cambia.

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + f(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = f(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 0$$

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_1 + \bar{v}_2) =$$

$$= f(\bar{v}_1, \bar{v}_1 + \bar{v}_2) + f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_1 + \bar{v}_2) =$$

$$= f(2\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_1 + \bar{v}_2) - f(2\bar{v}_1 + \bar{v}_2, 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2) =$$

$$= f(2\bar{v}_1 + \bar{v}_2, -\bar{v}_1) + f(-\bar{v}_1, -\bar{v}_1) =$$

$$= f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2, -\bar{v}_1) + f(-\bar{v}_1, -\bar{v}_1) =$$

$$= f(\bar{v}_2, -\bar{v}_1) = -f(\bar{v}_2, \bar{v}_1).$$

oss: Se f è multilineare alternante e un vettore in input è c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow f(S)=0$

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_{n-1}, \bar{w}) = \quad \text{con } w = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1}\bar{v}_{n-1}$$

$$= f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-1}, \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1}\bar{v}_{n-1}) +$$

$$+ f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-1}, -\alpha_{n-1}\bar{v}_{n-1}) = f(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_{n-1}, \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-2}\bar{v}_{n-2})$$

$$= \alpha_{n-1} f(v_2 \dots v_{n-1}, v_{n-1}) = 0$$

$= \dots$ dopo n passaggi

$$= f(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_{n-1}, \underline{0}) = 0$$

Def: Sia $\mathbb{K}^n$ uno s.vettoriale di dim $= n$ su $\mathbb{K}$.

Si dice <u>determinante</u>

$$\det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{K}$$

l'unica forma n-multilineare alternante tale che $\det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$